هدف درس

آشنایی دانشجويان با روش هاي آمار استنباطي پارامتريک و ناپارامتريک هدف اصلي اين درس مي‌باشد. دانشجويان با روش-هاي تحليل استنباطی با استفاده از داده‌های حاصل از نمونه آشنا خواهند شد.

سرفصل درس

نمونه و توزيع نمونه گيري
استنباط آماري با استفاده از نمونه بزرگ
تخمين بر اساس نمونه بزرگ
آزمون فرض آماري بر اساس نمونه بزرگ
استنباط آماري از نمونه کوچک
در اين بخش دانشجو با کاربردهاي توزيع هاي استودنت، کاي-دو و فيشر آشنا خواهد شد.
کاربردهاي توزيع کاي-دو (آزمون استقلال، همگني، نيکويي برازش)
تحليل واريانس و طراحی آزمايشات
رگرسيون ساده خطي و همبستگي
مدل‌هاي پيش بيني (مدل‌هاي ساده، اقتصاد سنجي، ميانگين متحرک، نمو هموار، ميانگين نمايي، وزني باکس و جنينگر، مدل هاي پيش بيني کيفي، روش هاي ترکيبي)

منابع پیشنهادی

فارسی:

رنجبران، هادی (۱۳۹۴). *آمار و احتمال: کاربرد آن در مدیریت و حسابداری*. نشر اثبات.
آذر، عادل و مومني، منصور (۱۳۹۳). *آمار و کاربرد آن در مديريت: جلد اول (چاپ بيستم)*. انتشارات سمت.

یادآوری

۲-۱۴ آزمایش‌های تصادفی و فضای نمونه‌ای

در علم احتمال، به عملی که برای جمع‌آوری داده‌ها صورت می‌پذیرد، «آزمایش» گفته می‌شود و اگر نتیجه‌ی این آزمایش را از پیش نتوان به‌طور قطع معین کرد، آن را «آزمایش تصادفی» می‌نامیم. مجموعه‌ی همه‌ی نتایج ممکن یک آزمایش تصادفی، «فضای نمونه‌ای» آن نامیده می‌شود که به‌طور معمول آن را با حرف S نمایش می‌دهند و تعداد عناصر فضای نمونه‌ای را با $n(S)$ نشان می‌دهند. فضای نمونه‌ای بر دو نوع است:

۱) اگر فضای نمونه‌ای شامل تعدادی عناصر محدود یا تعداد عناصر از لحاظ شمارش نامحدود باشد، آن‌را «فضای نمونه‌ای گسسته» می‌نامند.

۲) اگر فضای نمونه‌ای شامل مجموعه‌ی همه‌ی اعداد بین دو حد مشخص باشد، آن را «فضای نمونه‌ای پیوسته» می‌نامند.

نکته ۲۷ به هر یک از نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی یک «برآمد» گفته می‌شود. برآمد را با حرف «e» نشان می‌دهند.

مثال ۶۷ فضای نمونه‌ای پرتاب یک تاس چنین است:

$$S = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$$

این فضای نمونه، گسسته و محدود است.

شیر H
خط T

مثال ۶۸ فضای نمونه‌ای پرتاب یک سکه تا وقوع رویه‌ی شیر، چنین است:

$$S = \{H, TH, TTH, TTTH, \dots\}$$

این فضای نمونه، گسسته و نامحدود است. زیرا در این‌جا آزمایش تکرار می‌شود تا برای اولین بار رویه‌ی شیر بیاید که ممکن است در اولین بار بیاید یا در دومین بار بیاید یا هیچ‌گاه رویه‌ی شیر نیاید.

مثال ۶۹ فضای نمونه برای لامپ که حداکثر عمر آن ۲۰۰۰ ساعت است، چنین است:

$$S = \{x : ۰ \leq x \leq ۲۰۰۰\}$$

این فضای نمونه‌ی پیوسته است، زیرا تعداد نامتناهی زمان ممکن برای عمر لامپ وجود دارد که نمی‌توان تک‌تک آن‌ها را مشخص کرد.

مثال ۷۰ دو تاس به همراه سکه‌ای پرتاب می‌شود. فضای نمونه‌ای این آزمایش چند عضو دارد؟

حل.

$$n(S) = ۶^{۲} \times ۲^{۱} = ۳۶ \times ۲ = ۷۲$$

۲-۱۵ حادثه یا پیشامد

گفتیم که فضای نمونه‌ای یک مجموعه است. بنابراین، زیرمجموعه‌هایی می‌تواند داشته باشد. به هر زیرمجموعه از فضای نمونه‌ای، یک «پیشامد» یا «حادثه» گفته می‌شود. به‌طور معمول، پیشامدها را با حروف بزرگ انگلیسی مانند A، B، C و ... نشان می‌دهیم. اگر A یک پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشد:

$$A \subset S$$

۲-۱۹ اصول موضوعه‌ی احتمال

آزمایشی تصادفی را در نظر بگیرید که شامل n برآمد هم‌شانس باشد:

$$S = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$$

اصل اول: احتمال رخ دادن هر برآمد فضای نمونه‌ای یک عدد غیرمنفی است:

$$\boxed{P(e_i) \geq 0}$$

اصل دوم: مجموع احتمال‌های رخ دادن تمام برآمدهای فضای نمونه‌ای برابر با یک است:

$$\boxed{P(S) = P(e_1) + P(e_2) + \ldots + P(e_n) = 1}$$

اصل سوم: احتمال رخ دادن هر پیشامد مشخصی مانند A که دارای m عضو

$$A = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$$

باشد ($A \subset S$)، برابر است با مجموع احتمال رخ دادن برآمدهایی که پیشامد مزبور را تشکیل می‌دهند:

$$\boxed{P(A) = P(e_1) + P(e_2) + \ldots + P(e_m) = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots \frac{1}{n}}_{m \text{ بار}} = \frac{m}{n}}$$

۲-۲۲ پیشامدهای سازگار و ناسازگار[1]

۱) دو پیشامد را درصورتی «ناسازگار» گویند که نتوانند در یک زمان باهم رخ دهند. اگر یکی از آن‌ها رخ دهد، دیگری به‌طور قطع رخ نمی‌دهد. ولی امکان دارد که هیچ‌کدام از آن‌ها به‌وقوع نپیوندند.

۲) دو پیشامد را درصورتی «سازگار» گویند که بتوانند در یک زمان باهم رخ دهند. به عبارت دیگر وقوع یک پیشامد مستلزم عدم وقوع دیگری نیست.

مثال ۸۶ در تمرین‌های ۱ و ۲ برای هر جفت پیشامدها، معین کنید که آیا آن‌ها در یک آزمایش سازگارند یا ناسازگار؟

۱) A: انتخاب یک دکتر جراح زن، B: انتخاب یک دکتر جراح مغز

۲) A: انتخاب یک درس اختیاری، B: انتخاب یک درس الزامی

حل.

۱) پیشامدهای سازگار ۲) پیشامدهای ناسازگار

۲-۲۳ قانون جمع

در این بخش می‌خواهیم قاعده‌ای برای یافتن احتمال رخ دادن پیشامدهای (A یا B) پیدا کنیم. بهتر است به طریق زیر عمل کنیم:

$P(A \cup B)$
قانون جمع

آیا A و B ناسازگارند

بله ← ناسازگارند: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

خیر ← سازگارند: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

نکته ۳۶ هرگاه بگوییم وقوع پیشامدهای A یا B، منظور $A \cup B$ است و هرگاه بگوییم وقوع پیشامدهای A و B منظور $A \cap B$ است.

۲-۲۴ پیشامدهای مستقل و وابسته

دو پیشامد ناتهی را «مستقل» می‌گویند، اگر وقوع یا عدم وقوع یکی تأثیری بر وقوع یا عدم وقوع پیشامد دیگر نداشته باشد، در غیر این‌صورت دو پیشامد را «وابسته» گویند.

مثال ۹۲ پیشامدهای زیر مستقل‌اند.

A: انتخاب تصادفی یک مشتری که دارای موی مشکی باشد.

B: انتخاب تصادفی یک مشتری که کارت اعتباری داشته باشد.

مثال: پیشامدهای روبرو وابسته اند: A : انتخاب یک مدیر آقا برای سازمان

B: انتخاب یک مدیر خانم برای سازمان

۲-۲۵ احتمال شرطی

وقتی دو پیشامد، وابسته به یک‌دیگر باشند، وقوع یا عدم وقوع یکی بر وقوع یا عدم وقوع دیگری تأثیر می‌گذارد. در این‌صورت وقوع یکی را پس از این‌که دیگری به وقوع پیوسته باشد، محاسبه می‌نمایند، چنین احتمالی را «احتمال شرطی» گویند. فرض کنید S فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی و A و B دو پیشامد از S باشند، احتمال وقوع A پس از این‌که B اتفاق افتاده باشد را احتمال شرطی A به شرط B گویند و با علامت $P(A|B)$ نمایش می‌دهند و از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

و به‌طور مشابه:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$$

مثال ۹۳ اگر $P(A) = ۰٫۳$، $P(B) = ۰٫۵$ و $P(A \cup B) = ۰٫۶$، آن‌گاه $P(A|B)$ را بیابید.

حل.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)\ ;\ ۰٫۶ = ۰٫۳ + ۰٫۵ - P(A \cap B);\ P(A \cap B) = ۰٫۲$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{۰٫۲}{۰٫۵} = \frac{۲}{۵} = ۰٫۴$$

۲-۲۶ قانون ضرب

$A \cap B$

در این بخش می‌خواهیم قاعده‌ای برای یافتن احتمال رخ دادن پیشامدهای (A و B) پیدا کنیم. بهتر است به طریق زیر عمل کنیم:

$P(A \cap B)$
قانون ضرب

آیا A و B مستقل‌اند؟

بله ← مستقل: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

خیر ← وابسته: $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$

استقلال، یک رابطه‌ی متقارن است. به‌خصوص $P(A \cap B) = P(A)P(B)$، هر دو رابطه‌ی

$$P(A|B) = P(A)\ ,\ P(B|A) = P(B)$$

را ایجاب می‌کند. رابطه‌ی $P(A|B) = P(A)$ به این معنی است که وقوع پیشامد B تأثیری بر احتمال A ندارد.

نکته ۴۰ «پیشامدهای دوبه‌دو ناسازگار» و «پیشامدهای مستقل» دو مفهوم کاملاً متفاوت هستند؛ در حقیقت، برقراری یکی منجر ~~یم‌شود~~ می‌شود به این‌که دیگری نتواند برقرار باشد. پیشامدهای A و B را که احتمال‌های غیرصفرند در نظر بگیرید. وقتی که آن‌ها دوبه‌دو ناسازگارند، اشتراک آنها تهی است و $P(A \cap B) = ۰$. اگر این پیشامدها مستقل نیز باشند، می‌بایستی در شرط $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ صدق کنند، که این موضوع نمی‌تواند درست باشد. به‌عنوان مثال پیشامدهای A و A' دوبه‌دو ناسازگارند ولی به‌طور شهودی معلوم است که کاملاً وابسته‌اند، به این معنی که به محض وقوع پیشامد A، مطمئن هستیم که A' رخ نمی‌دهد.

نکته ۴۱ اگر A و B پیشامدهای ناسازگار باشند به‌قسمی که $P(A) > ۰$ و $P(B) > ۰$، آن‌گاه آن‌ها وابسته‌اند. زیرا وقوع یکی از آن‌ها موجب صفر شدن احتمال وقوع دیگری می‌شود. یعنی وقوع یکی مانع وقوع دیگری است. برای مثال، اگر A این پیشامد باشد که رئیس یک اداره زن، و B این پیشامد که رئیس همان اداره مرد است، آن‌گاه A و B ناسازگارند و بنابراین وابسته‌اند. اگر A واقع شود، یعنی اگر رئیس اداره زن باشد، احتمال این‌که B واقع شود، یعنی احتمال این‌که او رئیس اداره باشد، صفر است و برعکس.

مثال ۹۹ A و B دو پیشامد مستقل‌اند:

۱) اگر $P(A) = ۰/۱۵$، $P(B) = ۰/۷$، آن‌گاه $P(A \cap B)$ چقدر است؟

۲) اگر $P(A) = ۰/۶$، $P(B) = ۰/۳$، آن‌گاه $P(A|B)$ چقدر است؟

حل.

۱)

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = ۰/۱۵ \times ۰/۷ = ۰/۱۰۵$$

۲)

$$P(A|B) = P(A) = ۰/۶$$

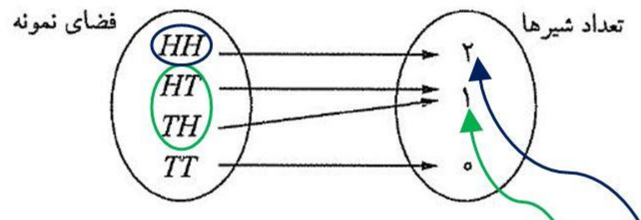
۱-۳ متغیر تصادفی

متغیری که مقدار عددی‌اش به‌وسیله‌ی برآمد یک آزمایش تصادفی تعیین می‌شود، «متغیر تصادفی» نامیده می‌شود. متغیر بودن این مشخصه به این علت است که از هر برآمد به برآمد دیگر، مقدار آن تغییر می‌کند. تصادفی بودن آن به این علت است که تغییرات آن به عوامل تصادفی که خارج از کنترل است، بستگی دارد. متغیر تصادفی را با حروف بزرگ X و Y و مقادیر خاصی را که این متغیر می‌تواند بپذیرد، با حروف کوچک x و y نشان می‌دهند.

مثال ۱ آزمایش پرتاب دو سکه‌ی سالم را در نظر بگیرید، فضای نمونه‌ای این آزمایش چنین است:

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

می‌توانیم متغیر تصادفی X را تعداد شیرهایی فرض کنیم که رخ می‌دهند. X می‌تواند مقادیر ۰، ۱ و ۲ را به‌خود بگیرد. به اولین عضو نمایش داده شده در S عدد ۲، به دومین عضو عدد ۱، به سومین عضو عدد ۱ و به چهارمین عضو عدد ۰ اختصاص می‌دهیم.



بنابراین، متغیر تصادفی برخلاف اسمش، متغیر نیست بلکه تابعی است که روی فضای نمونه‌ای تعریف می‌شود و هر یک از مقادیر آن متناظر با یک یا چند عضو از اعضای فضای نمونه است.

۳-۱-۱ متغیر تصادفی گسسته

متغیری را گویند که جمیع مقادیر ممکن آن، مجموعه‌ی محدود یا نامحدود، شمارش‌پذیر باشد. مثال‌هایی از این نوع متغیرها چنین‌اند:

- تعداد شماره‌های اشتباهی که یک تلفنچی در یک نوبت کاری می‌گیرد (محدود).
- تعداد پرتاب‌های متوالی یک تاس تا ظاهر شدن عدد ۲ (نامحدود).

۳-۱-۲ متغیر تصادفی پیوسته

متغیری را گویند که جمیع مقادیر ممکن آن، مجموعه‌ی تمامی اعداد حقیقی یا فاصله‌هایی از مجموعه‌ی اعداد حقیقی باشد، یا به گفته‌ی بهتر مجموعه‌ی نظیر آن شمارش‌ناپذیر باشد. مثال‌هایی از این نوع متغیرها چنین‌اند:

- مقدار آب مصرفی یک خانوار در یک ماه.
- مدت زمان لازم برای حل یک مسأله‌ی آمار.

۳-۲ تابع احتمال

به تابعی که بتوان با استفاده از آن احتمال هر یک از مقادیر ممکن متغیر تصادفی را مشخص کرد، «تابع احتمال» گفته می‌شود. در مورد متغیرهای گسسته و پیوسته تابع احتمال به‌طور متفاوت تعریف می‌شود.

۳-۲-۱ تابع احتمال گسسته

برای متغیرهای تصادفی گسسته، تابعی به‌عنوان «تابع جرم احتمال» و یا به اختصار «تابع احتمال» وجود دارد. تابع احتمال یک متغیر تصادفی گسسته‌ی X، تابعی است مانند $f(x_i) = P(X = x_i)$ که در شرط‌های زیر صادق است:

$$\boxed{۱)\ f(x_i) \geq ۰ \quad , \quad ۲)\ \sum_{i=۱}^{n} f(x_i) = ۱}$$

تابع احتمال گسسته را می‌توان به‌صورت یک فرمول، یک جدول یا یک نمودار نشان داد.

مثال ۲ آیا تابع زیر می‌تواند به‌عنوان تابع احتمال یک متغیر تصادفی به کار رود؟ چرا؟

$$f(x) = \frac{۳}{۴x!(۳-x)!} \quad , \quad x = ۰, ۱, ۲, ۳$$

حل. بلی؛ زیرا به‌ازای مقادیر ممکن x، $f(x)$ غیر منفی است و هم‌چنین جمع احتمالات نیز برابر یک است:

$$\sum f(x) = f(۰) + f(۱) + f(۲) + f(۳) = \frac{۳}{۲۴} + \frac{۳}{۸} + \frac{۳}{۸} + \frac{۳}{۲۴} = ۱$$

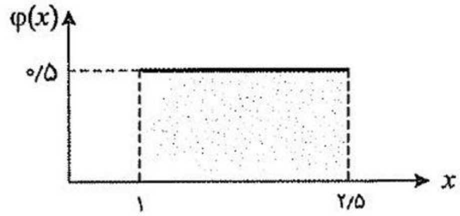
۳-۲-۲ تابع احتمال پیوسته

برای متغیرهای تصادفی پیوسته، تابعی به‌عنوان «تابع چگالی احتمال» و یا به اختصار «تابع چگالی» وجود دارد. تابع چگالی یک متغیر تصادفی پیوسته‌ی X، تابعی است مانند $\varphi(x)$ که در شرط‌های زیر صادق است:

$$\boxed{۱)\ \varphi(x) \geq ۰ \quad , \quad ۲)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = ۱}$$

برای یک تابع چگالی که نمودار یک متغیر تصادفی پیوسته است ارتباطی بین مساحت و احتمال وجود دارد. در شکل زیر، یافتن احتمال یک مقدار بین ۱ تا ۲/۵ می‌تواند با محاسبه‌ی مساحت هاشور خورده‌ی مستطیل شکل به ابعاد ۱/۵ و ۰/۵ انجام شود:

$$S = ۰/۵ \times ۱/۵ = ۰/۷۵$$



یعنی احتمال این‌که متغیر تصادفی X، عددی بین ۱ تا ۲/۵ باشد، برابر ۰/۷۵ است.

مثال ۹ آیا $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{x}{۲} & ۰ < x < ۱ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$ ، به‌عنوان تابع احتمال یک متغیر تصادفی به کار می‌رود؟ چرا؟

حل. خیر، چون جمع احتمالات برابر ۱ نیست.

$$\int_۰^۱ \frac{x}{۲}dx = \frac{x^۲}{۴}\Big|_۰^۱ = \frac{۱}{۴} - ۰ = \frac{۱}{۴}$$

نکته ۴ اگر $\varphi(x)$ نشان دهنده‌ی تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X باشد، آن‌گاه احتمال این که X بین a و b قرار گیرد، برابر با مساحت زیر منحنی تابع چگالی آن در بازه‌ی $[a, b]$ است:

$$\boxed{P(a \le X \le b) = \int_a^b \varphi(x)dx}$$

مثال ۱۱ متغیر تصادفی X با تابع چگالی احتمال زیر مفروض است:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{۲}{۳}x + \frac{۲}{۳} & ۰ \le x \le ۱ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

مطلوبست $P(۰/۵ \le X \le ۱)$.

حل.

$$P(۰/۵ \le X \le ۱) = \int_{۰/۵}^{۱} (\frac{۲}{۳}x + \frac{۲}{۳})dx = (\frac{۱}{۳}x^۲ + \frac{۲}{۳}x)\Big|_{۰/۵}^{۱} = \frac{۷}{۱۲}$$

مثال ۱۲ اگر $۵ \le x \le ۰$ و $\varphi(x) = ۰/۲$، مقدار $x_۰$ را چنان بیابید که $P(X \le x_۰) = ۰/۶$.

حل.

$$P(X \le x_۰) = ۰/۶ \; ; \; \int_۰^{x_۰} ۰/۲dx = ۰/۶ \; ; \; ۰/۲x\Big|_۰^{x_۰} = ۰/۶ \; ; \; ۰/۲x_۰ = ۰/۶ \; ; \; x_۰ = ۳$$

مثال ۱۳ عمر مفید (به روز) یک دارو، متغیر تصادفی X با چگالی احتمال زیر است:

$$\varphi(x) = ۲۰۰۰۰(x+۱۰۰)^{-۳} \ , \ x > ۰$$

احتمال این‌که دارو دست‌کم، به مدت ۲۰۰ روز مؤثر باشد را محاسبه کنید.

حل.

$$P(X \geq ۲۰۰) = \int_{۲۰۰}^{+\infty} ۲۰۰۰۰(x+۱۰۰)^{-۳}dx = \frac{-۲۰۰۰۰}{۲}(x+۱۰۰)^{-۲}\Big|_{۲۰۰}^{+\infty}$$
$$= -\frac{۱۰۰۰۰}{(x+۱۰۰)^{۲}}\Big|_{۲۰۰}^{+\infty} = ۰ - (-\frac{۱۰۰۰۰}{۳۰۰^{۲}}) = \frac{۱}{۹}$$

☆ ۳-۳ تابع توزیع (تابع توزیع تجمعی)

«تابع توزیع»، تابعی است که به ازای جمیع مقادیر ممکن متغیر تصادفی X، احتمال وقوع مقداری کوچک‌تر یا برابر با x را نشان می‌دهد. تابع توزیع یک متغیر تصادفی (گسسته یا پیوسته) X را به‌صورت زیر نشان می‌دهند:

$$\boxed{F(x) = P(X \leq x)}$$

۱) اگر X یک متغیر تصادفی گسسته با تابع احتمال $f(x)$ باشد، آن‌گاه:

$$\boxed{F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t)}$$

۲) اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی $\varphi(x)$ باشد، آن‌گاه:

$$\boxed{F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt}$$

در هر دو حالت، F یک تابع صعودی یکنوا خواهد بود.

مثال ۱۵ تابع احتمال زیر را در نظر بگیرید:

تابع احتمال گسسته

x	۱	۲	۳
$f(x)$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$

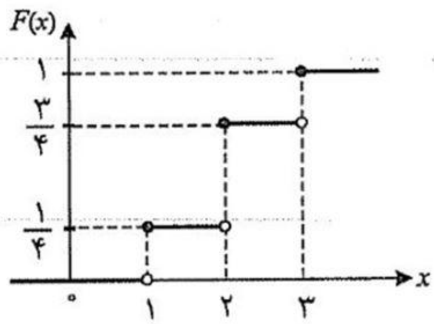
تابع توزیع متغیر تصادفی X را به‌دست آورید و نمودار آن را رسم کنید.

حل.

$$F(x)=\begin{cases} ۰ & x<۱ \\ \frac{۱}{۴} & ۱\leq x<۲ \\ \frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۲} & ۲\leq x<۳ \\ ۱ & x\geq ۳ \end{cases} \quad ;$$

x	۱	۲	۳
$F(x)$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۳}{۴}$	۱

بنابراین:



نتیجه: نمودار تابع توزیع متغیر تصادفی گسسته، به‌صورت پله‌ای است.